Stirlingの公式

Theorem. $n \to \infty$ のとき

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

が成り立つ.

Proof. まず, $d_n = \log n! - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \log n + n \ (n = 1, 2, \ldots, ...)$ と定義する. このとき

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \left(\log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n\right) - \left(\log{(n+1)}! - \left(n + \frac{3}{2}\right) \log{(n+1)} + (n+1)\right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} - 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{2(n+1)}{2n} - 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} - 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{1+(2n+1)^{-1}}{1-(2n+1)^{-1}} - 1
\end{aligned}$$

となる. ここで, $\log \dfrac{1+x}{1-x} \ (|x| < 1)$ における Taylor 展開式

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

の x に $x = (2n+1)^{-1}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{-(2m+1)}}{2m+1} - 1 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{-2m}}{2m+1} - 1 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{-2m}}{2m+1} \\
&> 0
\end{aligned}$$

より, $\{d_n\}$ は単調減少であることがわかる.

また

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{-2m}}{3} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{(2n+1)^{-2}}{1-(2n+1)^{-2}} \\
&= \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}
\end{aligned}$$

が成り立つから, $c_n = d_n - \dfrac{1}{12n}$ とすると $\{c_n\}$ は単調増加であることがわかる. また, $d_n > c_n$ であるから

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_n < \cdots < d_n < \cdots < d_3 < d_2 < d_1$$

が成り立つことがわかる. ゆえに, $\{d_n\}$ は下に有界であるから $n \to \infty$ のとき $\{d_n\}$ はある値 c に収束する. よって e^{d_n} の極限を考えることで

$$n! \sim e^c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

であることがわかる. あとは $e^c = \sqrt{2\pi}$ を示せばよい.

定積分 I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

とする. このとき, $I_0 = \dfrac{\pi}{2}, I_1 = 1$ である. また, $n \geq 2$ のとき,$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_n$ となる. よって

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \end{aligned}$$

となる. また, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ が成り立つから, $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ となるから

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

であり

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

であることもわかる.

さらに, $I_{2n} I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{4n+2}$ であり, このことから

$$I_{2n+1} \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}} = \sqrt{I_{2n} I_{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

となる. よって

$$\sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

と積に分解すると

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られる. また, I_{2n+1} の式を整理すると

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2^n (n!) \cdot 2^n (n!)}{(2n)!(2n+1)} \\ &= \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n!)(2n+1)} \end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n!)(2n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{2(2n!)\sqrt{n}}$$

より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 1$$

が得られ, この等式の階乗の部分に $n! \sim e^c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ を代入をすると

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \frac{(e^c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^2}{e^c (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} = \frac{e^c}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

となるから, $e^c = \sqrt{2\pi}$ であることがわかり, これで定理が示された. ■